

王鹏飞,温冠环,黄刚. 2014. 集合平均所构成的动力系统及其特性研究[J]. 大气科学学报, 37(6): 723-731. doi: 10. 13878/j. cnki. dqkxxb. 20131030001.

Wang Peng-fei, Wen Guan-huan, Huang Gang. 2014. An approach for analyzing the ensemble mean from a dynamic point of view[J]. Trans Atmos Sci, 37(6): 723-731. (in Chinese)

## 集合平均所构成的动力系统及其特性研究

王鹏飞<sup>1 2</sup>, 温冠环<sup>1 3</sup>, 黄刚<sup>2</sup>

(1. 中国科学院 大气物理研究所 季风系统研究中心, 北京 100190;

2. 中国科学院 大气物理研究所 大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室(LASG), 北京 100029; 3. 中国科学院大学, 北京 100049)

**摘要:** 以 Lorenz 系统为例, 推导出集合平均所定义的完整动力方程(均值方程), 将初值的集合平均问题作为一个广义的动力系统问题来进行研究; 对于双初值和多初值的均值方程, 利用定性理论分析了其吸引中心的位置和个数, 并使用数值试验进行了验证, 结果表明平均值的吸引子的结构与原解的吸引子位置、数量和结构均有不同。对均值方程的特征矩阵分析表明, 定点附近的稳定性与原方程相同, 而且特征方程所对应的特征值也与原方程相同。均值方程对应的相流散度为负值且数值上与原系统相同, 因此其在相空间中的体积收缩速度和原系统相同, 最终趋向一个低纬曲面, 均值方程的这个性质使得 Lorenz 系统的集合平均解趋于一个吸引子。均值方程可以保持原方程的耗散特性、吸引子特性, 但稳定点位置和个数发生了变化, 非定点处的 Jacobian 矩阵特征值与原系统也有不同。简而言之, 一旦使用了集合平均方法, 那么集合数值解并不是原系统的解, 仅保持了原系统的部分特征, 因而集合平均是否有效需要根据具体问题和外部限定条件才能确定。

**关键词:** Lorenz 方程; 集合平均; 稳定性; Jacobian 矩阵

文章编号: 1674-7097(2014)06-0723-09 中图分类号: P435 文献标志码: A

doi: 10. 13878/j. cnki. dqkxxb. 20131030001

## An approach for analyzing the ensemble mean from a dynamic point of view

WANG Peng-fei<sup>1 2</sup>, WEN Guan-huan<sup>1 3</sup>, HUANG Gang<sup>2</sup>

(1. Center for Monsoon System Research, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

2. State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics(LASG), Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China;

3. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract:** Simultaneous ensemble mean equations for the Lorenz model(LEMES) are obtained, enabling us to analyze the properties of the ensemble mean from a dynamical point of view. The qualitative analysis for the two-sample and  $N$ -sample LEMES shows that the locations and number of stable points are different from the Lorenz equations(LEs), and the results are validated by numerical experiments. The analysis for the eigenmatrix of stable points of LEMES indicates that the stability of these stable points is similar to the LEs'. The eigenmatrix for non-stable points can be obtained too, but the eigenvalues depend not only on the value of the mean variable but also the other  $N - 1$  sample equation's variable, and thus for these points there may be different stabilities compared to the LEs'. The divergence of the LEMES' flow has a negative value, which is the same as the LEs', and thus the

收稿日期: 2013-10-30; 改回日期: 2013-12-06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(41375112); 国家重点基础研究发展计划项目(2011CB309704); 中国科学院超级计算重点应用示范项目(全球涡分辨率海洋环流模式研发和应用)

通信作者: 王鹏飞, 博士, 高级工程师, 研究方向为数值分析、并行计算、非线性可预报性等, wpf@mail.iap.ac.cn.

trajectory in phase space approaches zero and the trajectory will be attracted to a low-level dimensional curved surface. i. e., the LEMEs have the attractor property, but the structure of the attractor is not the same as the LEs'. The ensemble mean method only keeps part of the original equations' properties, and thus whether the method is effective depends on the objective problem and other external restrictive conditions.

**Key words:** Lorenz equation; ensemble mean; stability; Jacobian matrix

## 0 引言

大气科学中的集合预报经历了随机动力预报、Monte-Carlo 预报、滞后平均预报等几个阶段,逐步发展到目前的业务化的集合预报和多模式集合预报。Epstein(1969)首次明确地以预报大气模式不确定性而引入随机动力预报的概念,他引入了一个多维动力模型,求模式解的概率密度所满足的动力方程;为了简化运算,他引入一个近似,只预报概率分布的一阶矩和二阶矩(即均值和方差)的概率分布。Epstein(1969)对 Lorenz 方程试验了这样的近似随机方程,使用 500 个样本计算,得出了集合预报对几天内的预报效果有改进的结论。Leith(1974)提出了使用  $n$  个成员来制作集合预报的方法,他在分析时没有采用模式变量,而是分析了偏差场,发现如果使用 Monte-Carlo 方法(MCF)产生的偏差场,集合平均之后可以使预报结果缓慢地接近气候值,且不需要进行回归运算,这样就可以用相对较少的集合数来完成预报。Hoffman and Kalnay(1983)提出了使用滞后平均预报(LAF)代替 Monte-Carlo 预报的方案,他们的方法是除了取  $t = 0$  时刻的样本值外,还用其他的一些等间隔时刻的样本参与运算,这样就可以有一些实况的预报信息被后面的样本所利用,结果表明 LAF 相比 Monte-Carlo 预报而言,预报技巧有明显优势。

经过很多研究,现在集合预报已有成熟的业务化预报方法,如:繁殖法(Toth and Kalnay, 1993)、奇异向量法(Palmer et al., 1993; Molteni et al., 1996)、资料同化法(Houtekamer et al., 1996)、多系统集合法(Kalnay and Ham, 1989; Fritsch et al., 2000)等。集合预报的应用范围也很广,除了天气预报外,还包括月、季、年际的预报、ENSO 事件的预报,以及其他一些气候变化问题的研究(蔡其发等, 1999; 姜智娜等, 2008; 郑飞等, 2009; 段明铿等, 2012; 康红文等, 2012)。

集合平均的数学基础是 Monte-Carlo 数值试验,每一个积分过程都可视为非平衡统计物理中的准粒子轨迹,从而使用大量积分来研究其概率密度分布(封国林和董文杰, 2003),实际业务中也计算集合预报中的多种统计量,如均值、方差、概率密度分布等。本质上讲,集合预报的目的有三个:一是通

过集合平均提高预报质量,二是加强预报的可靠性,三是为概率预报提供定量指标。集合预报在天气预报等领域有着广泛的应用,集合平均是最常用的方案之一,它的特点是计算简单,数学含义明确,以往的集合平均预报多从随机动力预报出发,着重研究集合预报的天气预报实现方法和具体应用,它能否用于减小混沌系统的预报误差仍是值得研究的问题。Houtekamer and Derome(1994, 1995)在分析两样本的集合预报时,使用了 3 变量的 Lorenz63 系统;研究结果表明:控制试验和两样本初值扰动的平均预报本质上的区别源于非线性作用,因此,必须用非线性的模型才能检测出集合平均预报的效果。Anderson(1997)使用两个低阶的模型,研究了非线性系统中约束型集合预报和非约束型集合预报的效果,结果表明非约束型集合预报可以取得与设定约束条件的集合预报相当的效果。

使用微分方程的定性理论在研究非线性动力系统轨道的空间结构、混沌吸引子等方面取得了巨大的成功,本文将从原始的非线性方程初值平均问题出发,把它对应的均值方程系统及样本初值联合在一起看作一个广义的微分动力系统,应用定性理论分析此均值系统长期的动力学行为和性质,进而研究均值系统的吸引子的结构,这对认识集合平均的本质和变化规律具有重要意义。本文的安排如下:第 1 节分析两个初值平均所得的 Lorenz 系统在相空间中平均值方程的变化规律,运用定性理论计算其稳定点(简称为定点);第 2 节分析 Lorenz 系统均值方程稳定点附近的动力系统结构稳定性,指出均值方程的特征值与解方程的全部特征值是对应的,只是排列不同;第 3 节将均值方程的理论拓展到  $n$  个样本的情形;第 4 节将均值方程的稳定点分析结果拓展到一般的非线性方程中,并利用矩阵代数的知识给出证明;第 5 节为全文的总结和讨论。

## 1 Lorenz 方程的两初值点均值方程及其稳定点

Lorenz(1963)通过定性分析和数值试验指出,一个确定的非线性动力系统可以有非常复杂的解,他所使用的 Lorenz63 方程被广泛用于混沌和可预报性方面的研究。Lorenz63 方程可以写为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y, \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz. \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\sigma, r, b$  是无量纲常数 (本文取  $\sigma = 10, r = 28.0, b = 8/3$ );  $t$  为无量纲时间。记基准值为  $(x, y, z)$ , 基准值的初值为  $(x^0, y^0, z^0) = (5, 10, 5)$ , 以两组初值做集合平均为例, 第一组记初值为  $(x_1^0, y_1^0, z_1^0) = (5.01, 10, 5)$ , 第二组初值为  $(x_2^0, y_2^0, z_2^0) = (4.99, 10, 5)$   $t$  时刻的平均值为  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , 则平均值的发展方程 (称为均值方程) 满足:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\sigma x_1 + \sigma y_1, \\ \frac{dy_1}{dt} = rx_1 - y_1 - x_1 z_1, \\ \frac{dz_1}{dt} = x_1 y_1 - b z_1; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = -\sigma x_2 + \sigma y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = rx_2 - y_2 - x_2 z_2, \\ \frac{dz_2}{dt} = x_2 y_2 - b z_2. \end{cases} \quad (3)$$

由于  $\bar{x} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \bar{y} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \bar{z} = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ , 所以平均值对应的初值为:  $\frac{1}{2}(x_1^0 + x_2^0), \frac{1}{2}(y_1^0 + y_2^0), \frac{1}{2}(z_1^0 + z_2^0)$ 。联立方程组 (2) 和 (3), 消去  $(x_2, y_2, z_2)$ , 可得方程组 (4):

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\sigma x_1 + \sigma y_1, \\ \frac{dy_1}{dt} = rx_1 - y_1 - x_1 z_1, \\ \frac{dz_1}{dt} = x_1 y_1 - b z_1, \\ \frac{d\bar{x}}{dt} = -\sigma \bar{x} + \sigma \bar{y}, \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = r\bar{x} - \bar{y} - \frac{1}{2}(2\bar{x} - x_1)(2\bar{z} - z_1) - \frac{1}{2}x_1 z_1, \\ \frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{1}{2}(2\bar{x} - x_1)(2\bar{y} - y_1) + \frac{1}{2}x_1 y_1 - b\bar{z}. \end{cases} \quad (4)$$

共 6 个变量, 有 6 个方程, 可求得  $(x_1, y_1, z_1, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  的解。方程组 (4) 完整地描述了平均值对应的发展

规律。

对于方程组 (4), 可研究其稳定点问题, 即求解

$$\begin{cases} 0 = -\sigma x_1 + \sigma y_1, \\ 0 = rx_1 - y_1 - x_1 z_1, \\ 0 = x_1 y_1 - b z_1, \\ 0 = -\sigma \bar{x} + \sigma \bar{y}, \\ 0 = r\bar{x} - \bar{y} - \frac{1}{2}(2\bar{x} - x_1)(2\bar{z} - z_1) - \frac{1}{2}x_1 z_1, \\ 0 = \frac{1}{2}(2\bar{x} - x_1)(2\bar{y} - y_1) + \frac{1}{2}x_1 y_1 - b\bar{z}. \end{cases}$$

这个方程组比较特殊, 它的前 3 个方程是独立的, 而后 3 个方程受前 3 个方程解的影响, 因此可以先求出前 3 个方程的解, 再求后 3 个方程的解, 具体解如下。

$x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = 0$  时, 有 3 组解:

$$\begin{cases} \bar{x} = 0 \\ \bar{y} = 0 \\ \bar{z} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{2} \sqrt{b(r-1)} \\ \bar{y} = \frac{1}{2} \sqrt{b(r-1)} \\ \bar{z} = \frac{1}{2}(r-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x} = -\frac{1}{2} \sqrt{b(r-1)} \\ \bar{y} = -\frac{1}{2} \sqrt{b(r-1)} \\ \bar{z} = \frac{1}{2}(r-1) \end{cases}$$

当  $\begin{cases} x_1 = \sqrt{b(r-1)} \\ y_1 = \sqrt{b(r-1)} \\ z_1 = r-1 \end{cases}$  时, 有 3 组解:

$$\begin{cases} \bar{x} = 0 \\ \bar{y} = 0 \\ \bar{z} = r-1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{2} \sqrt{b(r-1)} \\ \bar{y} = \frac{1}{2} \sqrt{b(r-1)} \text{ (重根)} \\ \bar{z} = \frac{1}{2}(r-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x} = \sqrt{b(r-1)} \\ \bar{y} = \sqrt{b(r-1)} \\ \bar{z} = (r-1) \end{cases}$$

当  $\begin{cases} x_1 = -\sqrt{b(r-1)} \\ y_1 = -\sqrt{b(r-1)} \\ z_1 = r-1 \end{cases}$  时, 有另外 3 组解:

$$\begin{cases} \bar{x} = 0 \\ \bar{y} = 0 \\ \bar{z} = r-1 \end{cases} \text{ (重根)}, \quad \begin{cases} \bar{x} = -\frac{1}{2} \sqrt{b(r-1)} \\ \bar{y} = -\frac{1}{2} \sqrt{b(r-1)} \text{ (重根)} \\ \bar{z} = \frac{1}{2}(r-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x} = -\sqrt{b(r-1)} \\ \bar{y} = -\sqrt{b(r-1)} \\ \bar{z} = (r-1) \end{cases}$$

当不考虑  $x_1, y_1, z_1$  的位置, 只考虑  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  的吸引中心, 可以发现均值的吸引子的中心有 6 个 (9 个解中去掉 3 个重合的中心点), 分别为:

$$\begin{cases} \bar{x} = 0 \\ \bar{y} = 0 \\ \bar{z} = 0 \end{cases} \begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{2} \sqrt{b(r-1)} \\ \bar{y} = \frac{1}{2} \sqrt{b(r-1)} \\ \bar{z} = \frac{1}{2}(r-1) \end{cases} \begin{cases} \bar{x} = -\frac{1}{2} \sqrt{b(r-1)} \\ \bar{y} = -\frac{1}{2} \sqrt{b(r-1)} \\ \bar{z} = \frac{1}{2}(r-1) \end{cases},$$

$$\begin{cases} \bar{x} = 0 \\ \bar{y} = 0 \\ \bar{z} = r-1 \end{cases} \begin{cases} \bar{x} = \sqrt{b(r-1)} \\ \bar{y} = \sqrt{b(r-1)} \\ \bar{z} = (r-1) \end{cases} \begin{cases} \bar{x} = -\sqrt{b(r-1)} \\ \bar{y} = -\sqrt{b(r-1)} \\ \bar{z} = (r-1) \end{cases}.$$

若只研究  $\bar{x}, \bar{y}$  的二维图形, 不考虑  $\bar{z}$  的变化 (即均值  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  在  $(\bar{x}, \bar{y})$  平面上的投影) 则为 5 个中心

$$\text{区} \left( \begin{cases} \bar{x} = 0 \\ \bar{y} = 0 \\ \bar{z} = 0 \end{cases} \text{与} \begin{cases} \bar{x} = 0 \\ \bar{y} = 0 \\ \bar{z} = r-1 \end{cases} \text{投影后重合} \right), \text{这与原方程解}$$

的吸引子中心在位置和数量上是不同的 (原方程解的定点个数为 3)。

图 1a 为通过数值试验得到的均值  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  在  $(\bar{x}, \bar{y})$  平面上的投影, 可见曲线分布较为复杂, 虚线标出了得到的 5 个中心区, 与图 1b 中  $(x, y, z)$  在  $(x, y)$  平面上的投影明显不同, 图 1b 中的中心区域明显为 3 个, 均值的图像中除了中心区的位置和数

量不同外, 轨迹的分布形式也更为复杂。

## 2 均值方程定点附近的稳定性分析

方程组 (4) 一共有 9 个平衡点, 知道了这些平衡点后, 就可以用经典的微分方程理论分析方程组 (4) 在平衡点附近的变化趋势。对方程组 (4) 在定点附近做小参数展开, 略去高阶项得

$$\begin{cases} \frac{dx'_1}{dt} = -\sigma x'_1 + \sigma y'_1, \\ \frac{dy'_1}{dt} = rx'_1 - y'_1 - x'_1 z_1 - x_1 z'_1, \\ \frac{dz'_1}{dt} = x'_1 y_1 + x_1 y'_1 - bz'_1, \\ \frac{d\bar{x}'}{dt} = -\sigma \bar{x}' + \sigma \bar{y}', \\ \frac{d\bar{y}'}{dt} = r\bar{x}' - \bar{y}' - 2\bar{x}\bar{z}' - 2\bar{x}\bar{z} + x'_1 \bar{z} + x_1 \bar{z}' + \bar{x}' z_1 + \bar{x} z'_1 - x'_1 z_1 - x_1 z'_1, \\ \frac{d\bar{z}'}{dt} = 2\bar{x}\bar{y}' + 2\bar{x}\bar{y} - x'_1 \bar{y} - x_1 \bar{y}' - \bar{x}' y_1 - \bar{x} y'_1 + x'_1 y_1 + x_1 y'_1 - b\bar{z}'. \end{cases} \quad (5)$$

它的线性化矩阵为:

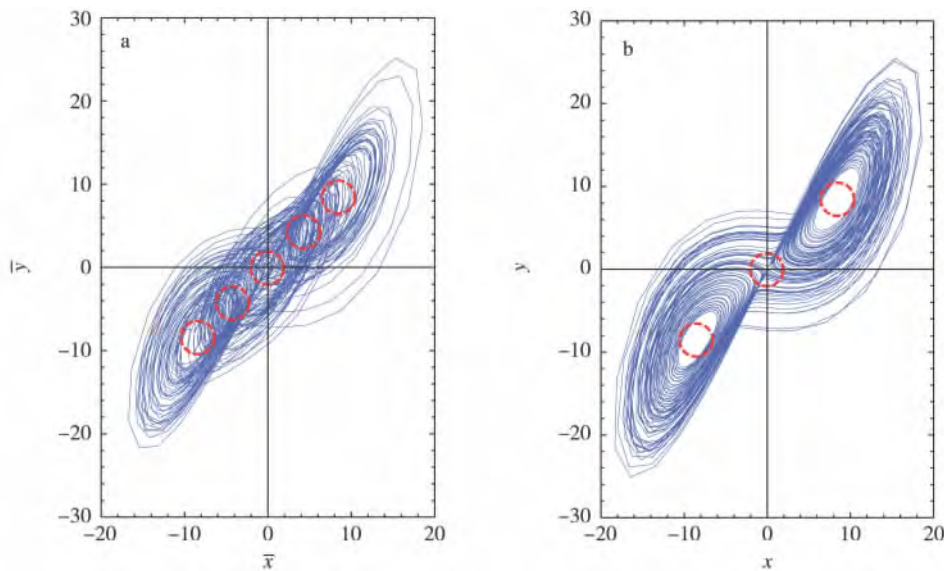


图 1 方程组 (4) 在初值为  $(x_1^0, y_1^0, z_1^0) = (5.01, 10, 5)$ 、 $(\bar{x}^0, \bar{y}^0, \bar{z}^0) = (5, 10, 5)$  计算到  $t = 100$  时刻所得的数值解 a. 均值  $(\bar{x}, \bar{y})$  的二维图像; b. 解  $(x, y)$  的二维图像

Fig. 1 The solution of Equations (4) for time  $t = 0 - 100$  with the initial condition  $(x_1^0, y_1^0, z_1^0) = (5.01, 10, 5)$  and  $(\bar{x}^0, \bar{y}^0, \bar{z}^0) = (5, 10, 5)$  (The red dashed circle indicates the location of the stable points) a. the projection of the mean value  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  in  $(\bar{x}, \bar{y})$  plane; b. the projection of the variable  $(x, y, z)$  in  $(x, y)$  plane

$$\begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (r - z_1) & -1 & -x_1 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & x_1 & -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma & \sigma & 0 \\ \bar{z} - z_1 & 0 & \bar{x} - x_1 & (r + z_1 - 2\bar{z}) & -1 & (-2\bar{x} + x_1) \\ y_1 - \bar{y} & x_1 - \bar{x} & 0 & (2\bar{y} - y_1) & (2\bar{x} - x_1) & -b \end{bmatrix} \quad (6)$$

利用 (6) 式首先可分析定点附近的稳定性。

当  $x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = 0, \bar{x} = 0, \bar{y} = 0, \bar{z} = 0$  时, 线性化矩阵 (6) 式变为:

$$\begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b \end{bmatrix},$$

它的特征值为  $\lambda$ , 特征方程为:  $(\lambda + b)^2 [\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)]^2 = 0$ 。特征方程的解为:

$$\lambda_1 = -b,$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(r - 1)}}{2},$$

$$\lambda_4 = -b,$$

$$\begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma & \sigma & 0 \\ (r - 1)/2 & 0 & \sqrt{b(r - 1)}/2 & 1 & -1 & -\sqrt{b(r - 1)} \\ -\sqrt{b(r - 1)}/2 & -\sqrt{b(r - 1)}/2 & 0 & \sqrt{b(r - 1)} & \sqrt{b(r - 1)} & -b \end{bmatrix} \quad (7)$$

它的特征方程为:

$$[\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (r + \sigma)b\lambda + 2\sigma b(r - 1)](\lambda + b)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0. \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma & \sigma & 0 \\ (r - 1)/2 & 0 & -\sqrt{b(r - 1)}/2 & 1 & -1 & \sqrt{b(r - 1)} \\ \sqrt{b(r - 1)}/2 & \sqrt{b(r - 1)}/2 & 0 & -\sqrt{b(r - 1)} & -\sqrt{b(r - 1)} & -b \end{bmatrix} \quad (9)$$

它的特征方程为:

$$[\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (r + \sigma)b\lambda + 2\sigma b(r - 1)](\lambda + b)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0. \quad (10)$$

对其他的 6 组解, 重复这个过程可以发现: 虽然线性化矩阵的阶数为 6, 但在定点处矩阵 (6) 特征根的值与 Lorenz 方程的特征值是一样的。在进行稳定性分析时, 关注的是复数根中实部的正负号问题,

$$\lambda_{5,6} = \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(r - 1)}}{2}.$$

当  $r < 1$  时, 是稳定吸引点; 当  $r = 1$  时, 为分叉点的; 当  $r > 1$  时, 原点变为不稳定鞍点, 同时出现新的平衡态。

当解取为第二组  $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = 0 \end{cases}$  且

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{2} \sqrt{b(r - 1)} \\ \bar{y} = \frac{1}{2} \sqrt{b(r - 1)} \\ \bar{z} = \frac{1}{2}(r - 1) \end{cases}$$
 时, 线性化矩阵 (6) 式变为:

当第三组解  $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = 0 \end{cases}$  且  $\begin{cases} \bar{x} = -\sqrt{b(r - 1)}/2 \\ \bar{y} = -\sqrt{b(r - 1)}/2 \\ \bar{z} = (r - 1)/2 \end{cases}$  时, 线性

化矩阵 (6) 式变为:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{b(r - 1)} & 1 & -1 & \sqrt{b(r - 1)} \\ -\sqrt{b(r - 1)} & -\sqrt{b(r - 1)} & -b & -\sqrt{b(r - 1)} & -\sqrt{b(r - 1)} & -b \end{bmatrix}$$

以确定系统是渐近稳定还是发散, 因此关于 Lorenz 方程中  $r$  的取值范围, 经典分析也适用于这个均值方程。即当  $1 < r < 24.74$  时, 有稳定的平衡态, 当  $r > 24.74$  时为混沌状态。

实际上, 特征矩阵 (6) 式对应的特征值问题的解表征了局部的轨道是发散还是收敛, 可见均值系统的特征值除了与均值点的位置有关外, 还受到其他集合解位置的影响, 这是与单解不同的地方。

### 3 多初值点的均值方程及其特性

现将 2 个初值的情形拓展到  $n$  个初值的情形, 每个初值对应的解满足:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = -\sigma x_i + \sigma y_i, \\ \frac{dy_i}{dt} = rx_i - y_i - x_i z_i, \\ \frac{dz_i}{dt} = x_i y_i - bz_i. \end{cases} \quad (11)$$

其中:  $i$  的取值为  $1 \leq i \leq n$ ; 初值为  $(x_i^0, y_i^0, z_i^0)$ 。对方程组 (11) 中的 3 个方程, 做变量替换  $x_n = n\bar{x} - \sum_{i=1}^{n-1} x_i, \bar{y}_n = n\bar{y} - \sum_{i=1}^{n-1} y_i, \bar{z}_n = n\bar{z} - \sum_{i=1}^{n-1} z_i$ , 可以将 (11) 式化为一个以  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \bar{x}, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \bar{y}, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, \bar{z}$  为变量的动力系统。可以证明, 此均值

系统的定点满足:

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k \\ \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^k \\ \bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^k \end{cases} \quad \text{其中 } X_i^k, Y_i^k, Z_i^k \text{ 为}$$

方程组 (1) 的第  $k$  个稳定点,  $1 \leq k \leq 3$ 。即均值的稳定点为 (1) 式的稳定点的不同排列相加再除以  $n$ , 最多有  $3^n$  个稳定点 (包含重根), 更为详细的证明和稳定性的讨论见第 4 节。

(11) 式中变量替换后的 3 个方程为

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = -\sigma\bar{x} + \sigma\bar{y}, \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = r\bar{x} - \bar{y} - \frac{1}{n} \left( n\bar{x} - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right) \left( n\bar{z} - \sum_{i=1}^{n-1} z_i \right) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} x_i z_i, \\ \frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{1}{n} \left( n\bar{x} - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right) \left( n\bar{y} - \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - b\bar{z}. \end{cases} \quad (12)$$

对 (11) 式整个系统求散度, 易知散度为  $-n(\sigma + 1 + b)$ , 因此均值系统的散度为负值, 系统的相体积也是逐渐减小的, 这与 Lorenz 系统的散度特性是一致的。此外, 还可以仿照王鹏飞等 (2012) 的方法对此均值系统证明其吸引子的存在性, 这也与 Lorenz 系统的吸引性质是一致的。

综合第 1、2、3 节的研究可见, Lorenz 方程的均值系统在稳定点的个数、位置、局部 Jacobian 行列式特征值等性质上与 Lorenz 系统是有差别的, 但在耗

散性、吸引子存在性等方面是一致的。

### 4 一般均值方程的平衡点及其附近的稳定性问题

含  $m$  个变量的常微分系统写为:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2, \dots, x_m), \\ \frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \\ \vdots \\ \frac{dx_m}{dt} = F_m(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{cases} \quad (13)$$

其中  $F_j(x_1, x_2, \dots, x_m)$  为函数。方程组 (13) 对应的定点问题为:

$$\begin{cases} 0 = F_1(x_1, x_2, \dots, x_m), \\ 0 = F_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \\ \vdots \\ 0 = F_m(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{cases} \quad (14)$$

设求解方程组 (14) 得到的稳定点为  $K$  个, 其中第  $k$  个稳定点记为  $X^k = (X_1^k, X_2^k, \dots, X_m^k)$ , 以  $x_{j,i}$  表示  $j$  号变量的第  $i$  组初值对应的解。方程组 (13) 对应的均值方程为:

$$\begin{cases} \frac{dx_{1,1}}{dt} = F_1(x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{m,1}), \\ \frac{dx_{2,1}}{dt} = F_2(x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{m,1}), \\ \vdots \\ \frac{dx_{m,1}}{dt} = F_m(x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{m,1}), \\ \frac{dx_{1,2}}{dt} = F_1(x_{1,2}, x_{2,2}, \dots, x_{m,2}), \\ \frac{dx_{2,2}}{dt} = F_2(x_{1,2}, x_{2,2}, \dots, x_{m,2}), \\ \vdots \\ \frac{dx_{m,2}}{dt} = F_m(x_{1,2}, x_{2,2}, \dots, x_{m,2}), \\ \vdots \\ \frac{dx_{1,n}}{dt} = F_1(x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{m,n}), \\ \frac{dx_{2,n}}{dt} = F_2(x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{m,n}), \\ \vdots \\ \frac{dx_{m,n}}{dt} = F_m(x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{m,n}). \end{cases} \quad (15)$$

其中最后  $m$  个方程可以用  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$  来替换掉变量  $(x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{m,n})$ , 方程组 (15) 对应的定点问题为:

$$\begin{cases} 0 = F_1(x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{m,1}), \\ 0 = F_2(x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{m,1}), \\ \vdots \\ 0 = F_m(x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{m,1}), \\ 0 = F_1(x_{1,2}, x_{2,2}, \dots, x_{m,2}), \\ 0 = F_2(x_{1,2}, x_{2,2}, \dots, x_{m,2}), \\ \vdots \\ 0 = F_m(x_{1,2}, x_{2,2}, \dots, x_{m,2}), \\ \vdots \\ 0 = F_1(x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{m,n}), \\ 0 = F_2(x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{m,n}), \\ \vdots \\ 0 = F_m(x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{m,n}). \end{cases} \quad (16)$$

可以看出方程组 (16) 中每  $m$  个方程构成的方程组同方程组 (14), 因此  $(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{m,i})$  的定点个数也为  $K$  个, 且与方程组 (14) 的解相同。

对方程组 (16) 中的后  $m$  个方程, 做变量替换

$$x_{j,n} = n \bar{x}_j - \sum_{i=1}^{n-1} x_{j,i} \text{ 化为:}$$

$$\begin{cases} 0 = F_1(x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{m,n}), \\ 0 = F_2(x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{m,n}), \\ \vdots \\ 0 = F_m(x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{m,n}). \end{cases} \quad (17)$$

可见方程组 (17) 同方程组 (14), 因此  $(x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{m,n})$  的定点个数也为  $K$  个, 且与方程组 (14) 的解相同。对于  $(x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{m,n})$  的第  $k$  个定点有如下关系:

$$\begin{cases} X_1^k = n \bar{x}_1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_{1,i}, \\ X_2^k = n \bar{x}_2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_{2,i}, \\ \vdots \\ X_m^k = n \bar{x}_m - \sum_{i=1}^{n-1} x_{m,i}. \end{cases}$$

其中:  $1 \leq k \leq K$ ; 而  $(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{m,i})$  可以为  $K$  个定点中的任意一个, 所以,

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \frac{(X_1^k + \sum_{i=1}^{n-1} x_{1,i})}{n}, \\ \bar{x}_2 = \frac{(X_2^k + \sum_{i=1}^{n-1} x_{2,i})}{n}, \\ \vdots \\ \bar{x}_m = \frac{(X_m^k + \sum_{i=1}^{n-1} x_{m,i})}{n}. \end{cases}$$

即均值的稳定点为方程组 (14) 的稳定点的排列组合相加再除以  $n$ , 最多有  $K^n$  个稳定点 (可能包含重根)。

知道了均值的稳定点之后, 根据动力系统稳定性的理论 (刘秉正和彭建华, 2004), 只要研究方程组 (15) 的线性化系统的特征值问题, 就能知道均值系统在稳定点附近的性质。

对应方程组 (13) 的线性化系数矩阵为:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

其中:  $a_{lj} = \frac{\partial F_l}{\partial x_j}$  (即每个位置给出一套  $a_{lj}$ , 这里只考虑 1 阶线性化的情形) 而对于均值方程组 (15), 线性化系数矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} a_{11,1} & \cdots & a_{1m,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1,1} & \cdots & a_{mm,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{11,2} & \cdots & a_{1m,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m1,2} & \cdots & a_{mm,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{11,j} & \cdots & a_{1m,j} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{m1,j} & \cdots & a_{mm,j} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{11,n} & \cdots & a_{1m,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{m1,n} & \cdots & a_{mm,n} \end{bmatrix} \quad (19)$$

其中:  $a_{ij,i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ 。记  $A_i = \begin{bmatrix} a_{11,i} & \cdots & a_{1m,i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1,i} & \cdots & a_{mm,i} \end{bmatrix}$   $A_i$  对应

的行列式的值为  $|A_i| = \begin{vmatrix} a_{11,i} & \cdots & a_{1m,i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1,i} & \cdots & a_{mm,i} \end{vmatrix}$ 。

由线性代数的知识可知, (19) 式对应的行列式

的值为:  $\det(C) = \prod_{i=1}^n \det(A_i)$ 。使用变量替换:

$x_{j,n} = n \bar{x}_j - \sum_{i=1}^{n-1} x_{j,i}$  且利用  $a_{ij,n} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_{1,n}, x_{2,n}, \dots,$

$x_{m,n})$ , 可以把  $A_n = \begin{bmatrix} a_{11,n} & \cdots & a_{1m,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1,n} & \cdots & a_{mm,n} \end{bmatrix}$  化为使用  $\bar{x}_j$  为

基的矩阵, 记为  $B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}$  (变换后, 矩阵

$C$  中的后  $m$  行的值都发生了变化, 但是只有  $B$  区的值会影响行列式的值)。

矩阵(18)对应的特征值满足方程:  $\det(\lambda I - A) = 0$ 。对于每个定点, 将得到一组特征值  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ , 共有  $K$  组。均值方程的特征值方程可化为:

$$\det(\lambda I - B) \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda I - A_i) = 0。$$

而  $\det(\lambda I - B) = 0$  得到的  $m$  组特征值为  $\det(\lambda I - A) = 0$  得到的  $K$  组特征值的另一个排列, 因此并没有产生新的特征值, 且最大的特征值  $\lambda_{\max}$  也相同。因此, 对于矩阵(18)中各参数的取值而引起的平衡点附近稳定性的结果, 也适用于均值方程。

## 5 小结

定性理论分析表明 2 个初值 Lorenz 系统的均值方程共有 9 个平衡点, 如果只考虑均值的定点位置(不考虑解的定点位置), 那么均值的平衡点为 6 个。将 2 个初值的集合平均拓展到  $n$  个初值平均后, 理论上总的平衡点为  $3^n$  个, 但其中有较多重复的稳定点。

通过分析一般均值方程的特征矩阵, 得到了一般均值系统中相应的稳定点和平衡态性质与原动力系统的稳定点和平衡态性质的关系。结果表明, 稳定点附近均值方程对应的特征方程并没有引入与原方程不同的特征值, 只是在排列顺序上有所不同, 因此原方程的稳定性分析和判据也适用于均值方程。而非平衡点附近的稳定性除了与均值本身的数值有关外, 还与参与集合计算的其他样本的数值有关。

将均值方程看作一个广义的微分动力系统来进行研究的好处是明显的, 这样可以将全部的研究动力系统的理论、方法和工具直接用于集合平均的研究和分析, 这对认识集合平均的特性是有意义的。本研究得到了 Lorenz 系统均值方程的平衡点、稳定性判据、吸引性质等以前未被集合平均理论所描述的一些性质, 其结果可以加深对集合平均作用的理解, 例如: 集合平均是保持了原解的哪些性质, 这是有益于计算的; 引入了哪些原解不具备的性质, 这一般是混淆原解的, 是不利于数值计算和预报分析的。

在使用均值方程研究集合平均系统的时候, Wang (2013) 还证明了 Lyapunov 指数不变性; 且集合平均不能保证  $t \rightarrow \infty$  时的平均解收敛于真解, 特别是解的概率分布形式发生了变化, 这些问题将另文探讨。



## 参考文献:

- 蔡其发,张立凤,张铭. 1999. 中期数值天气预报的集合预报试验[J]. 气候与环境研究, 4(4): 365-374.
- 段明铿,王盘兴,李驰钦. 2012. NCEP 集合预报系统在亚欧和北美区域的预报效果对比[J]. 大气科学学报, 35(6): 641-651.
- 封国林,董文杰. 2003. 集合预报物理基础的探讨[J]. 物理学报, 52(9): 2347-2353.
- 姜智娜,穆穆,王东海. 2008. 基于条件非线性最优扰动方法的集合预报试验[J]. 中国科学 D 辑: 地球科学, 38(11): 1444-1451.
- 康红文,祝从文,左志燕,等. 2012. 多模式集合预报及其降尺度技术在东亚夏季降水预测中的应用[J]. 气象学报, 70(2): 192-201.
- 刘秉正,彭建华. 2004. 非线性动力学[M]. 北京: 高等教育出版社.
- 王鹏飞,李建平,丁瑞强,等. 2012. Lorenz 系统误差方程的吸引子特性研究[J]. 气候与环境研究, 17(5): 574-582.
- 郑飞,王慧,朱江. 2009. 初始误差和模式误差对 ENSO 集合预报的影响[J]. 科学通报, 54(16): 2395-2401.
- Anderson J L. 1997. The impact of dynamical constraints on the selection of initial conditions for ensemble predictions: Low-order perfect model results[J]. Mon Wea Rev, 125(11): 2969-2983.
- Epstein E S. 1969. Stochastic dynamic prediction I [J]. Tellus, 21(6): 739-759.
- Fritsch J, Hilliker J, Ross J, et al. 2000. Model consensus[J]. Wea Forecasting, 15(5): 571-582.
- Hoffman R N, Kalnay E. 1983. Lagged average forecasting, an alternative to Monte Carlo forecasting [J]. Tellus A, 35(2): 100-118.
- Houtekamer P, Derome J. 1994. Prediction experiments with two-member ensembles [J]. Mon Wea Rev, 122(9): 2179-2191.
- Houtekamer P, Derome J. 1995. Methods for ensemble prediction [J]. Mon Wea Rev, 123(7): 2181-2196.
- Houtekamer P, Lefaiivre L, Derome J, et al. 1996. A system simulation approach to ensemble prediction [J]. Mon Wea Rev, 124(6): 1225-1242.
- Kalnay E, Ham M. 1989. Forecasting forecast skill in the Southern Hemisphere [C]//Preprints of the 3rd International Conference on Southern Hemisphere Meteorology and Oceanography, Buenos Aires, 13017 November 1989. Boston, MA: Amer Meteor Soc.
- Leith C. 1974. Theoretical skill of Monte Carlo forecasts [J]. Mon Wea Rev, 102(6): 409-418.
- Lorenz E N. 1963. Deterministic nonperiodic flow [J]. J Atmos Sci, 20(2): 130-141.
- Molteni F, Buizza R, Palmer T N, et al. 1996. The ECMWF ensemble prediction system: Methodology and validation [J]. Quart J Roy Meteor Soc, 122(529): 73-119.
- Palmer T N, Molteni F, Mureau R, et al. 1993. Ensemble prediction [C]//ECMWF seminar proceedings: Validation of models over Europe: Vol 1, ECMWF Shinfield Park, Reading, UK.
- Toth Z, Kalnay E. 1993. Ensemble forecasting at NMC: The generation of perturbations [J]. Bull Amer Meteor Soc, 74(12): 2317-2330.
- Wang P F. 2013. On the linear operation of cloned dynamical systems and its Lyapunov exponents [EB/OL]. 2013(2014-03-16) [2014-12-20]. <http://arxiv.org/abs/1311.2239>.

(责任编辑:倪东鸿)